

### INTRODUCCIÓN GENERAL DEL ÁREA PARA EL GRADO (*Saber ser, saber hacer, saber conocer*)

En las mallas de aprendizaje se pretende ofrecer orientaciones para esbozar caminos posibles para el desarrollo de los aprendizajes de los estudiantes en el área de matemáticas. Esta propuesta se fundamenta en los Derechos Básicos de Aprendizaje, a su vez, retoma la propuesta de los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, a partir de estos documentos subyace una visión de las matemáticas como creación humana y como disciplina en desarrollo y en constante cambio. En consecuencia con ello, se espera consolidar ideas para el acompañamiento a los profesores, en este caso de grado noveno; con la intención que se propenda por el desarrollo de dimensiones como el saber SER, el saber HACER, y el saber CONOCER, pues no se trata de la implementación aislada de conceptos, sino de apostarle al desarrollo integral de los estudiantes, al reconocer que las matemáticas forman parte del sistema de valores compartidos y tienen fundamentos éticos para constituirse en una práctica social.

En coherencia con los planteamientos en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006), y los aprendizajes fundamentales descritos en los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) se enfatiza en que la formulación y resolución de problemas es el proceso a través del cual se dinamizan otros procesos, la *actividad matemática* misma y, por tanto, los aprendizajes de los estudiantes. La noción de ser matemáticamente competente sugiere ambientes de aprendizaje a través de la formulación y resolución de problemas que propicien la construcción progresiva y cíclica de niveles de conceptualización y construcción del conocimiento matemático de los estudiantes, para ello se requiere que los profesores propongan diversidad de situaciones, con diferentes grados de complejidad, de tal manera que se movilicen procesos que involucran las actividades que conforman el ciclo de resolución de problemas. En correspondencia con los aprendizajes del grado octavo, se espera que para el grado noveno el estudiante reconozca las formas que se asocian al número con relación a procesos infinitos, configuraciones numéricas y funciones. Al mismo tiempo, resuelva problemas que se relacionan con diferentes modelos que se vinculan con lo variacional o lo geométrico. Para este grado la conceptualización referente al cociente incremental es una posibilidad para encontrar sentido a las matemáticas en relación con otras ciencias como la física, la economía, la población, entre otros. Tales situaciones permiten al estudiante comunicar ideas que se relacionan con la variación y con la covariación en distintos sistemas de representación como son el uso del lenguaje cotidiano, las gráficas, los registros tabulares, la simbolización, etc.

Otro aspecto que es propicio desarrollar en este grado respecto al pensamiento matemático hace alusión a la construcción de cantidades extensivas e intensivas y sus relaciones de dependencia. En este sentido, la semejanza, el paralelismo, los teoremas, entre otros permiten que el estudiante conciba procesos de medición indirectos con instrumentos convencionales o artefactos de medida. Dichos procesos de medición conllevan al estudiante a plantear conjeturas y justificaciones de propiedades geométricas o a su representación en sistemas coordenados. También es correspondiente con el grado de escolaridad que los estudiantes de noveno utilicen medidas de asociación y correlación, represente la información de diversas maneras y se apoye en diferentes recursos tecnológicos. Las anteriores acciones posibilitan en el estudiante explicar la variabilidad. De acuerdo con los anteriores planteamientos, el estudiante de noveno grado podrá integrar o articular competencias básicas de los pensamientos matemáticos.

En esta malla se retoman los enunciados y evidencias de la segunda versión de los Derechos Básicos de Aprendizaje. Se agrupan por tipos de pensamiento, a saber: Numérico - Variacional, Métrico-Espacial y Aleatorio, además una red conceptual que permite visibilizar algunas de las relaciones entre los saberes estructurantes, los DBA y los procesos generales. Otro componente de las mallas, son las consideraciones didácticas, como posibles caminos de diseño curricular, algunas claridades sobre los tópicos y las acciones sugeridas para abordar los aspectos mencionados, con el propósito de lograr consistencia, coherencia y pertinencia de las propuestas curriculares del MEN para el área de matemáticas.

Los aprendizajes esperados en el estudiante al finalizar el grado se consolidan en la siguiente red conceptual:

**NUMÉRICO - VARIACIONAL**

APRENDIZAJES	EVIDENCIAS
Utiliza los números reales (sus operaciones, relaciones y propiedades) para resolver problemas con expresiones polinómicas.	Considera el error que genera la aproximación de un número real a partir de números racionales
	Identifica la diferencia entre exactitud y aproximación en las diferentes representaciones de los números reales.
	Construye representaciones geométricas y numéricas de los números reales (con decimales, raíces, razones, y otros símbolos) y realiza conversiones entre ellas.
Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.	Identifica y utiliza múltiples representaciones de números reales para realizar transformaciones y comparaciones entre expresiones algebraicas.
	Establece conjeturas al resolver una situación problema, apoyado en propiedades y relaciones entre números reales
	Determina y describe relaciones al comparar características de gráficas y expresiones algebraicas o funciones.
Utiliza los números reales, sus operaciones, relaciones y representaciones para analizar procesos infinitos y resolver problemas.	Encuentra las relaciones y propiedades que determinan la formación de secuencias numéricas.
	Determina y utiliza la expresión general de una sucesión para calcular cualquier valor de la misma y para compararla con otras sucesiones.
Utiliza expresiones numéricas, algebraicas o gráficas para hacer descripciones de situaciones concretas y tomar decisiones con base en su interpretación.	Opera con formas simbólicas que representan cantidades.
	Reconoce que las letras pueden representar números y cantidades, y que se pueden operar con ellas y sobre ellas.
	Interpreta expresiones numéricas, algebraicas o gráficas y toma decisiones con base en su interpretación.
Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.	Efectúa exploraciones, organiza los resultados de las mismas y propone patrones de comportamiento.
	Propone conjeturas sobre configuraciones geométricas o numéricas y las expresa verbal o simbólicamente.
	Valida las conjeturas y explica sus conclusiones.
	Interpreta expresiones numéricas y toma decisiones con base en su interpretación.

**MÉTRICO - ESPACIAL**

APRENDIZAJES	EVIDENCIAS
Identifica y utiliza relaciones entre el volumen y la capacidad de algunos cuerpos redondos (cilindro, cono y esfera) con referencia a las situaciones escolares y extraescolares.	Estima la capacidad de cuerpos redondos.
	Construye cuerpos redondos usando diferentes estrategias
	Compara y simboliza las relaciones que encuentra de manera experimental entre el volumen y la capacidad de cuerpos redondos.
	Explica la pertinencia o no de la solución de un problema de cálculo de área o de volumen de acuerdo con las condiciones de la situación.
Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Thales y el de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes	Describe y justifica procesos de medición de longitudes.
	Explica propiedades de figuras geométricas que se involucran en los procesos de medición.
	Justifica procedimientos de medición a partir del Teorema de Thales, Teorema de Pitágoras y relaciones intra e interfigurales.
	Valida la precisión de instrumentos para medir longitudes
	Propone alternativas para estimar y medir con precisión diferentes magnitudes.
Conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos	Reconoce regularidades en formas bidimensionales y tridimensionales.
	Explica criterios de semejanza y congruencia a partir del teorema de Thales.
	Compara figuras geométricas y conjetura sobre posibles regularidades.
	Redacta y argumenta procesos llevados a cabo para resolver situaciones de semejanza y congruencia de figuras
Interpreta el espacio de manera analítica a partir de relaciones geométricas que se establecen en las trayectorias y desplazamientos de los cuerpos en diferentes situaciones	Describe verbalmente procesos de trayectorias y de desplazamientos
	Explica las propiedades del movimiento de las figuras y los representa gráficamente

**ALEATORIO**

APRENDIZAJES	EVIDENCIAS
<p>Propone un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación.</p>	Define el método para recolectar los datos (encuestas, observación o experimento simple) e identifica la población y el tamaño de la muestra del estudio.
	Construye diagramas de caja y a partir de los resultados representados en ellos describe y compara la distribución de un conjunto de datos.
	Compara las distribuciones de los conjuntos de datos a partir de las medidas de tendencia central, las de variación y las de localización.
	Elabora conclusiones para responder el problema planteado.
<p>Encuentra el número de posibles resultados de experimentos aleatorios, con reemplazo y sin reemplazo, usando técnicas de conteo adecuadas, y argumenta la selección realizada en el contexto de la situación abordada. Encuentra la probabilidad de eventos aleatorios compuestos.</p>	Diferencia experimentos aleatorios realizados con reemplazo, de experimentos aleatorios realizados sin reemplazo.
	Encuentra el número de posibles resultados de un experimento aleatorio, usando métodos adecuados (diagramas de árbol, combinaciones, permutaciones, regla de la multiplicación, etc.).
	Justifica la elección de un método particular de acuerdo al tipo de situación.
	Encuentra la probabilidad de eventos dados usando razón entre frecuencias.

**CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS**

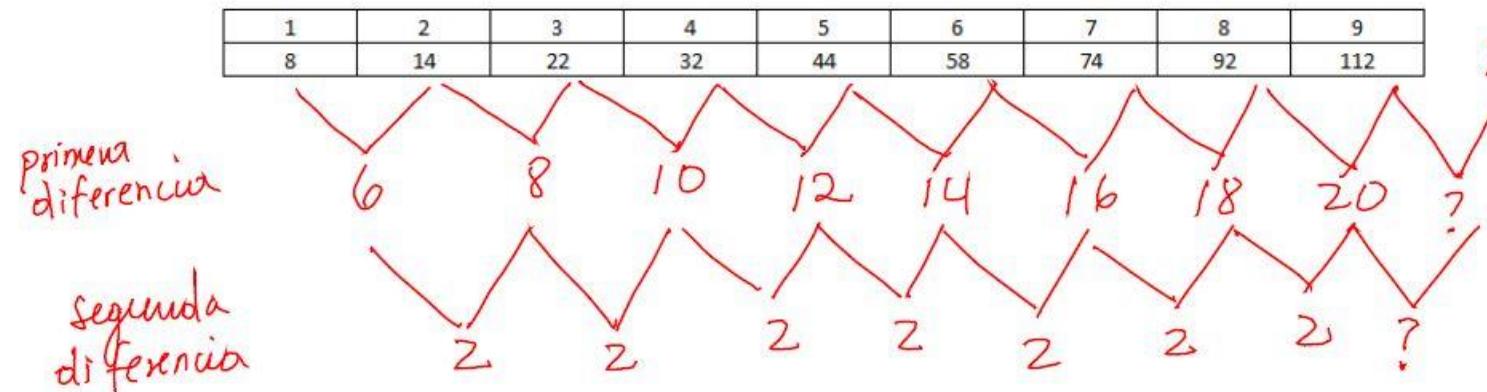
***Sobre el Pensamiento Numérico y Variacional:***

En el grado noveno se espera que el estudiante logre establecer un vínculo más fuerte entre el pensamiento numérico y el pensamiento variacional e, incluso, con temáticas asociadas a la geometría y a la medida. Si bien en los grados anteriores este vínculo ha estado presente, en este grado toma relevancia en términos del tratamiento algebraico de los procesos de variación en los que intervienen los números reales. Para establecer esa articulación, es importante proponer al estudiante tareas como las ejemplificadas en el DBA 1 para este grado.; a partir de allí, se espera que los estudiantes logren construir un *sentido y significado de los números* lo cual un cimiento del desarrollo procesos de modelación y comunicación. Para el desarrollo de este tipo de procesos, se recomienda que los estudiantes formule sus propias preguntas acerca de los fenómenos o situaciones que se estudian; discutan con sus compañeros acerca de las matemáticas involucradas en la

situación que permite responder a esas preguntas; convenir y argumentar un camino posible para atender a sus propias preguntas, inferir relaciones entre cantidades y representarlas a través de la oralidad y de las representaciones simbólicas (entre ellas, la representación algebraica). También se recomienda, dar la posibilidad a los estudiantes para determinar otros fenómenos o situaciones en los que existen comportamientos similares o en los que tienen presencia las matemáticas. También es importante presentar modelos que estén compuestos por funciones polinómicas y no polinómicas, a partir de ellos, se propone que los estudiantes reconozcan las variables y el dominio y rango de ellas, tanto en el fenómeno como matemáticamente. Asimismo, que saquen inferencias, conclusiones y anticipen resultados cuando el modelo lo permita.

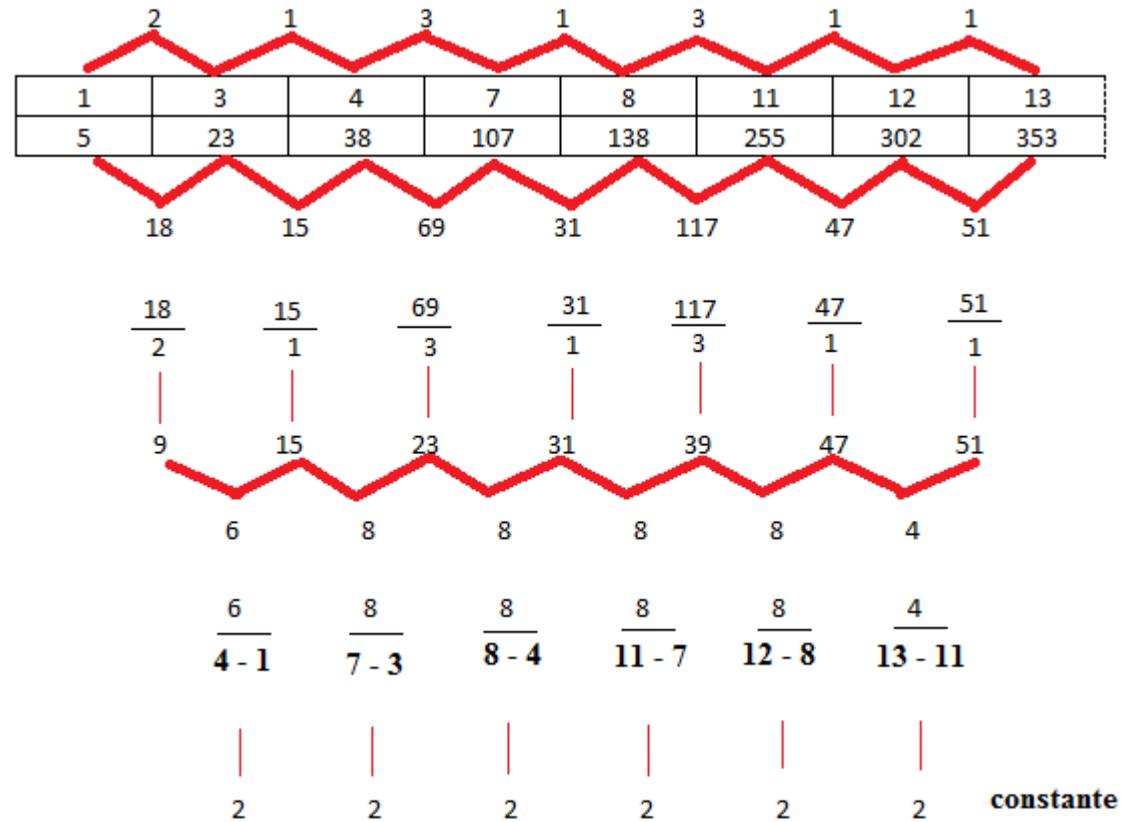
En la construcción de las funciones a partir del estudio de la variación intervienen diversidad de aspectos; el primero de ellos, es la posibilidad de crear ambientes en los que los estudiantes puedan experimentar, tomar datos y analizarlos. El software Tracker es una buena posibilidad para ello; por ejemplo a través de este software se puede promover el estudio del movimiento.

Es importante aclarar que aunque en los currículos escolares convencionalmente aparece el estudio de las funciones, ello no implica que estén siendo estudiadas bajo un enfoque del desarrollo del pensamiento variacional. Contrario a ello, cuando las funciones se agotan en definiciones que apelan a la representación simbólica y a un tratamiento netamente procedimental, poco se favorece este tipo de pensamiento. A manera de ejemplo, sugerimos un tratamiento de la *función cuadrática* a partir de un enfoque de la variación. Para ello, se recomienda reconocer en una función cuadrática la variación de la tasa de variación (segunda variación) es una constante. Por ejemplo, en una tabla de valores, como la que se muestra en la siguiente figura, se observa que la segunda tasa de variación es un constante.



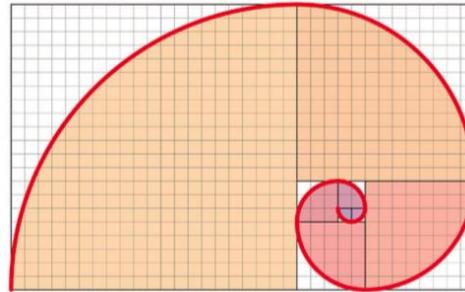
En caso que la anterior tabla pudo analizarse solo a través de las diferencias, pues los valores de la variable independiente estaban en secuencia de los números naturales; para el caso de una tabla de valores que previamente se conoce que corresponde a una función polinómica, el análisis se puede hacer a través de la razón de cambio de primer y de segundo, en la siguiente ilustración se

muestra un ejemplo de ello:



Dado que previamente se sabe que la tabla de valores corresponde a una función cuadrática y que la segunda tasa de variación es una constante, entonces se puede concluir que corresponde a una función cuadrática; y por tanto, su expresión algebraica se puede determinar por varios métodos; entre ellos, el de sistemas de ecuaciones.

De otro modo, se proponen otro tipo de actuaciones la relación aritmética y geometría. Para ello, se sugiere la construcción geometría y el estudio de las propiedades de algunos números irracionales; de esta manera, contribuir a darle sentido al conjunto de los números reales. A manera de ejemplo, se propone que en estudiar el número de oro y la media y extrema razón. Se recomienda realizar la construcción de la división de un segmento en media y extrema razón; posteriormente, relacionar este resultado con el número  $\phi$ . Posteriormente, se propone que el estudiante retome el ejemplo de tarea del DBA 3 de este grado y describa la manera como fue construida la espiral; así mismo, que intente construir la espiral con regla y compás, de tal manera que pueda descubrir algunos patrones en la representación geométrica de la figura y ésta le permita establecer unos parámetros para calcular el número aritméticamente.



Otro proceso que requiere especial atención en este grado es el estudio de las funciones; al respecto, un primer acercamiento al concepto de función

El estudio del número de oro permite además estudiar sus propiedades en términos de potencias y su relación con el Teorema de Pitágoras, esto es:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Al elevar al cuadrado y realizar operaciones, se obtiene:

$$\phi^2 = 1 + \phi.$$

Así mismo, realizando operaciones se obtienen otras potencias de  $\phi$ :

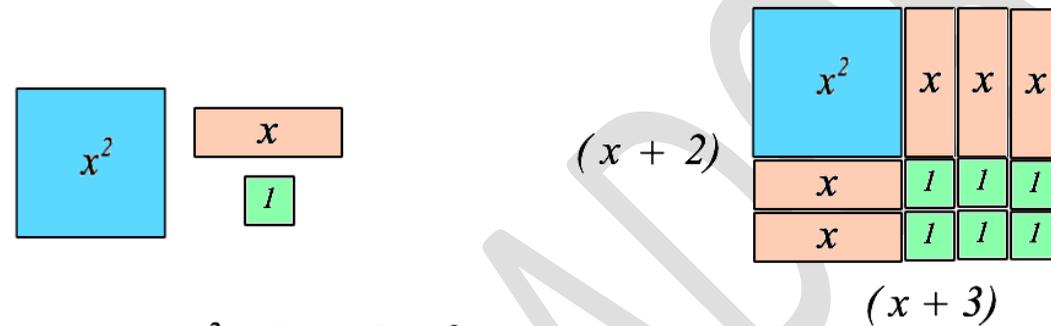
$$\phi^3 = 1 + 2\phi.$$

$$\begin{aligned} \phi^0 &= 1 \\ \phi^1 &= \phi \\ \phi^2 &= \phi^0 + \phi^1 = 1 + \phi \\ \phi^3 &= \phi^1 + \phi^2 = 1 + 2\phi \\ \phi^4 &= \phi^2 + \phi^3 = 2 + 3\phi \\ \phi^5 &= \phi^3 + \phi^4 = 3 + 5\phi \\ \phi^6 &= \phi^4 + \phi^5 = 5 + 8\phi \\ &\vdots \\ \phi^n &= \phi^{n-1} + \phi^{n-2} \end{aligned}$$

$\phi =$

Procesos como la resolución de problemas y la modelación que se propone desarrollar a lo largo de la educación secundaria, estructuran el currículo en el grado noveno y fortalecen procesos académicos y formativos en los estudiantes. En el campo de la solución de problemas se espera que la actividad matemática propuesta en el aula, vincule contextos propios de los estudiantes que permitan apelar al desarrollo de las ecuaciones lineales y cuadráticas, y de igual manera a los sistemas de ecuaciones donde se reflejen las comprensiones de los estudiantes sobre el “dominio de la variable”, esto es, como ya se propuso en el grado octavo; indagar en el estudiantes sobre que representan las variables y cómo éstas se conjugan en una expresión matemática para darle sentido a la interpretación de un problema. En esta dirección se propone retomar parte del trabajo del grado octavo propuesto para desarrollar la factorización, y de esta manera darle otro sentido a la solución de una ecuación, además de promover los procesos de modelación. Un ejemplo de ello puede ser inicialmente encontrar la solución de una ecuación cuadrática con la ayuda de las figuras que componen el “álgebra geométrica”, esto es:

Si necesitamos resolver la ecuación  $x^2 + 5x + 6 = 0$



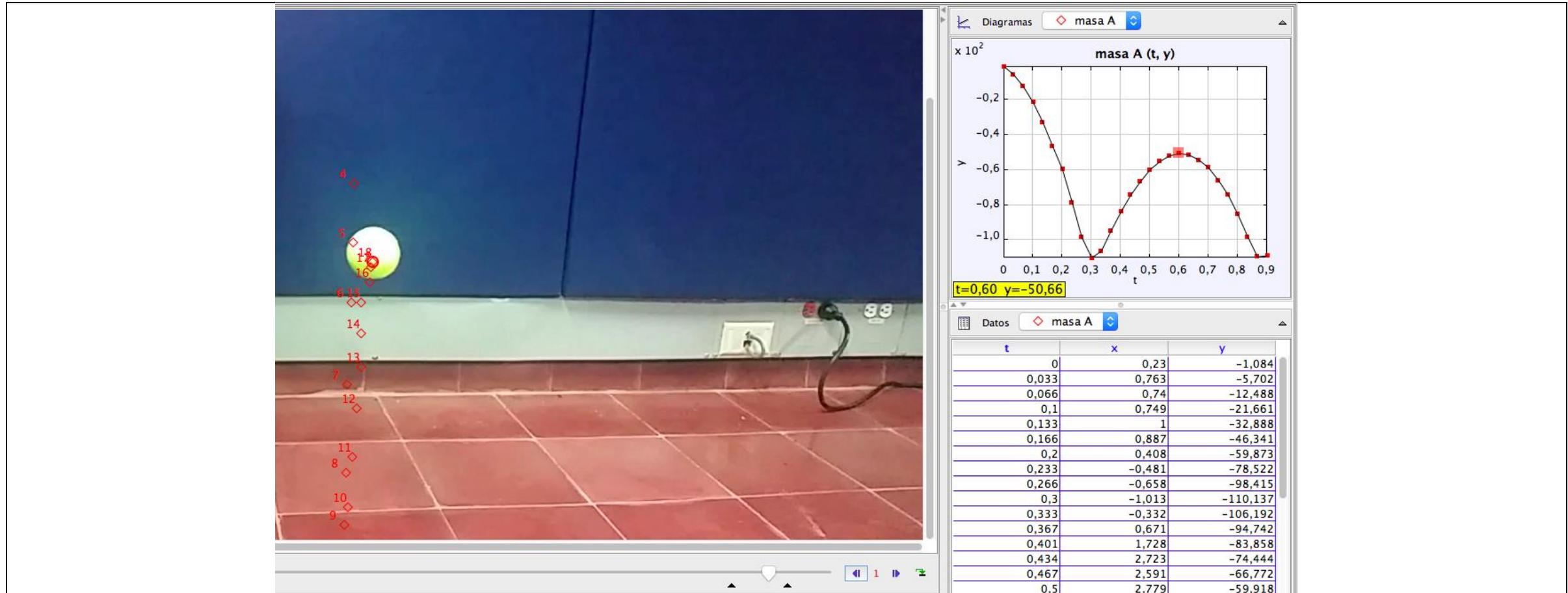
$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

$$(x + 2) = 0 \quad (x + 3) = 0$$

(Figura 2)

Habitualmente, el trabajo con ecuaciones cuadráticas dirige la mirada de los procesos de aula a encontrar la solución de una ecuación, y en esa dirección, la factorización y la fórmula general para solucionar una ecuación cuadrática terminan por ser el insumo vital para en el cual se centra la atención de los estudiantes, sin embargo, en la última década varias investigaciones mostraron que el dirigir la mirada solo a ese tipo de procedimientos, deja de lado otras maneras de trazar vínculos entre la matemática y la el contexto de los estudiantes. En ese sentido, se propone que los maestros propongan estudiar la ecuación cuadrática de la manera como se muestra en la figura 2, pero aprovechar el estudio de la misma para estudiar fenómenos que puedan vincular procesos de modelación asociadas a la función cuadrática. En este sentido, un trabajo que pueden seguir los docentes en el aula de clase, es proponerles a sus estudiantes que realicen un video corto (no más de 10 segundos), en el cual analicen el lanzamiento de un objeto en varias direcciones.



**Sobre el Pensamiento Espacial y Métrico**

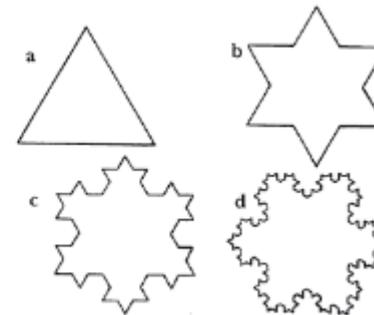
Después de experimentar con el volumen de cuerpos regulares e irregulares y la capacidad de diferentes recipientes, al describir procesos de medición, resolver problemas y expresar las medidas en distintas unidades según el contexto, los estudiantes se dedicarán a encontrar las relaciones entre el volumen y la capacidad de algunos cuerpos redondos a través de procesos de estimación de la capacidad de cilindros, la construcción y la comparación de las propiedades de algunos cuerpos. Además identificarán la congruencia y la semejanza entre figuras y cuerpos a partir de

comparaciones, mediciones y reconocimiento de regularidades y propiedades.

Los fractales suministran modelos geométricos que contribuyen a percibir el espacio y las propiedades de objetos y procesos naturales. El fractal puede asumirse como un objeto geométrico compuesto de elementos donde se varía tamaño y orientación, pero se mantiene la particularidad de formación. Por ejemplo, si un objeto fractal lo aumentamos, los elementos que aparecen vuelven a tener el mismo aspecto independientemente de cual sea la escala que utilizamos, y formando parte, como en un mosaico de los elementos mayores. Es decir estos elementos que conforman su estructura geométrica se mantienen. Para representar gráficamente un fractal, es necesario encontrar la relación o la ley de recursividad entre las formas que se repiten. Es decir encontrar el objeto elemental y la ley de formación y establecer el algoritmo gráfico. Con el ánimo de que los estudiantes realicen una representación gráfica de un fractal, el profesor puede explicar la configuración de uno de ellos, por ejemplo de un copo de nieve, para ello les puede indicar los siguientes pasos:

- A. Dibuja con instrumentos de medida un triángulo equilátero.
- B. Divide cada lado del triángulo en tres partes iguales y dibuja el triángulo sobre el tercio central.
- C. Repite el proceso con cada uno de los lados del triángulo, el número de veces que se desee.
- D. Completa y analiza tablas como las siguientes. ¿Qué regularidades encuentras?
- E. Explorar apps como <https://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3513> en la que el estudiante evidenciará las diferentes fases de la formación de diversos fractales como copos de nieve, ramificaciones de árboles y otros con áreas de figuras, también crearán su propio fractal y analizarán las tablas de registro que se elaboran a partir de cada uno de ellos.

Fase	0	1	2	3	4
Cantidad de triángulos					



Es posible que el profesor pregunte a los estudiantes por la función que relaciona el perímetro del triángulo en función del triángulo inicial o del área del copo de nieve en función del área inicial. Para que los estudiantes puedan proponer sus propios fractales se les sugiere buscar información acerca de *Waclaw Sierpinski, Karl Meugen, Niels Fabian Helge von Koch, George Cantor, Giuseppe Peano, Gaston Julia, Benoit Mandelbrot* y describir las configuraciones que ellos proponen. Luego, los estudiantes en papel milimetrado o con la ayuda de un software de geometría dinámica dibujaran las fases sucesivas para determinar una configuración fractal y analizar las sucesivas iteraciones a partir de la visualización, para luego explicar cómo se configura el patrón de formación e identificar ejes y centros de simetría y ángulos de rotación. Para que el estudiante encuentre sentido a la actividad, es importante explorar la aplicación de los fractales en diversas áreas del saber cómo la geografía, para determinar la distancia entre dos puntos de regiones costeras, en biología con relación a la formación de patrones en seres vivos, y en medicina para predecir los cambios en

la textura de los huesos y detectar enfermedades. De esta forma los estudiantes tendrán la oportunidad de explorar otros contextos y plantear diversas estrategias para resolver problemas en los que la iteración juega un papel fundamental.

El hecho de representar en tablas, gráficas y verbalmente los procesos de iteración en los fractales, lleva a los estudiantes a pensar y explicar las propiedades que se conservan, la relación entre número de lados de una figura con la inicial, con la anterior y con la siguiente, pero también la relación entre áreas, longitudes y número de figuras según el n-ésimo término.

La autosimilaridad y la dimensión de los fractales como características que inviten a los estudiantes a encontrar regularidades, a pensar en procesos infinitos, a hallar y describir las relaciones de semejanzas, entre cada parte del fractal y el fractal completo, favorecen en el estudiante la toma de decisiones acerca de qué variables se relacionan, cuáles se conservan y cuáles son relevantes en la búsqueda de los patrones, de esta forma los estudiantes generarán modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, en este caso los fractales, para analizar formas de la naturaleza, del cuerpo humano o de fenómenos y predecir procedimientos numéricos, caracterizar el modelo, interpretar de sus formas de representación, las afirmaciones y la construcción de la expresión del modelo, su aplicación y validación.

### ***Sobre el Pensamiento Aleatorio***

En los grados anteriores se ha venido desarrollando el ciclo investigativo para llevar a cabo estudios censales o muestrales, de comparación de dos o más variables de una población o de dos grupos de poblaciones. Se han estudiado diversos tipos de tablas y gráficas y sus características. Se ha discutido y utilizado diversas formas de presentación de los resultados y se han propuesto inferencias informales.

Para el grado noveno, se propone centrar la discusión en la distribución de los datos, mediante el análisis de la presencia de la variabilidad, utilizando adecuadamente las relaciones y diferencias entre las medidas de tendencia central y las de dispersión. La comparación de las distribuciones de frecuencia de variables estadísticas tiene su soporte en el uso diferencial y simultáneo de diversos gráficos, como por ejemplo los histogramas y los diagramas de cajas.

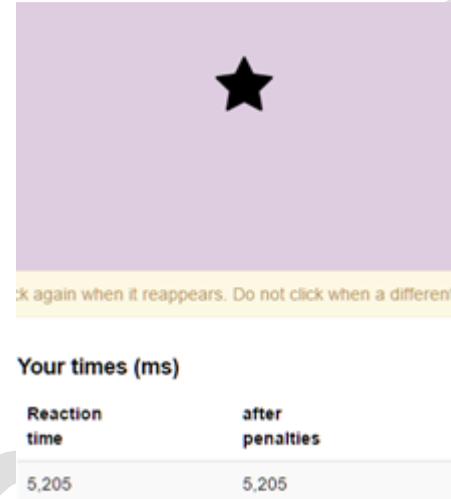
Así, el ciclo investigativo para este grado se desarrolla a partir del análisis comparativo entre dos muestras de poblaciones diferentes o dos muestras de subconjuntos de una misma población. Iniciar, como en los casos anteriores por la formulación de una pregunta es una actividad que los estudiantes ya deben manejar con bastante experiencia. La discusión para este curso se puede orientar hacia la relación entre los estudios estadísticos y la probabilidad y el azar, para dar inicio al estudio más formal de la aleatoriedad, en los grados siguientes.

De tal manera que, en este grado se pretende estimular a los estudiantes para que diseñen y desarrollen experimentos estadísticos en los que se estimen los parámetros estadísticos con una cierta fiabilidad y se estudie la distribución para inferir conclusiones acerca del comportamiento de las poblaciones y las posibles diferencias y semejanzas.

Un experimento posible de realizar consiste en pulsar un botón para medir el tiempo de reacción que tiene una persona ante el estímulo. La experiencia se realiza haciendo uso de los dispositivos de la página <http://nrch.maths.org/reactionTimerApp/#/>

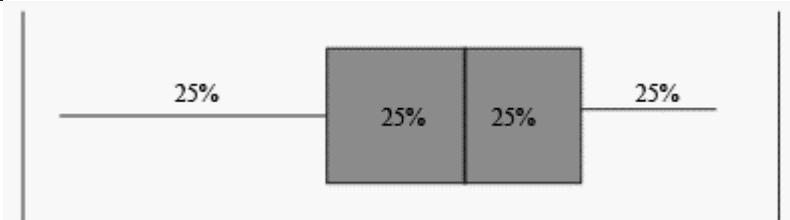
Un análisis posible es verificar si una misma persona tiene diferencias entre los tiempos de reacción con la mano izquierda o con la derecha.

Para realizar el experimento se discuten aspectos como, cuáles son las condiciones para su realización, como evitar las variaciones excesivas producidas por la mala realización de la actividad, cuántos datos se van a tomar, etc. así como asuntos que tienen que ver con las características de la variable en estudios y su medición. Para el ejemplo que se está desarrollando, es necesario que se entienda cómo funciona el experimento, el significado de ms como medida y que una vez se decida iniciar se continúe hasta completar el número de datos definido.



Como se sabe, el momento siguiente a la recolección de la información es el análisis y la selección de las representaciones. Conviene estimular en los estudiantes la lectura simultánea de datos mediante dos o más tipos de gráficas, como se presenta para el ejemplo que se viene presentando.

En este caso los estudiantes no solo deben comprender lo que cada gráfico visibiliza, por ejemplo, en el histograma se hace visible la diferencia entre las frecuencias mientras que en el gráfico de cajas se visibiliza la dispersión y la variabilidad de los datos y se puede inferir de su aspecto la asimetría o simetría del conjunto de datos. Particularmente este gráfico se introduce por primera vez en este grado y por tanto es importante que se haga una discusión sobre sus características, el significado de los cuartiles y la distribución equitativa de los datos, como se muestra en la figura.



Analizar el comportamiento de cada uno de los conjuntos de datos y luego compararlos, requiere que el estudiante pueda identificar en cada gráfica las medidas de tendencia central y las de variación, así como conocer métodos de cálculo gráficos o numéricos para encontrar sus valores. La distribución de una variable se analiza tomando en cuenta su forma y su variación y para ello los gráficos y las medidas deben ser utilizadas simultáneamente, lo que implica razonar con los datos y apoyado en la visualización.

En el ejemplo en cuestión, los resultados se presentan en las siguientes gráficas, fueron tomados en las horas de la mañana, que muestran la existencia de una diferencia entre el tiempo de reacción de la mano derecha y la mano izquierda, afirmación que debe ser sustentada en los datos, las medidas y las gráficas. El uso del programa Geogebra es de gran utilidad para generar las gráficas.



Por último, y luego de responder la pregunta planteada inicialmente el profesor puede invitar a los estudiantes a realizar otras experiencias por ejemplo estudiar si hay diferencias en los tiempos de reacción de una misma persona entre la mañana y la noche, o entre dos personas de la misma edad, o entre dos personas de diferente edad y propiciar discusiones como la utilidad que tiene para un conductor tener buenos tiempos de reflejo.

La presencia del azar en esta experiencia está explicada porque el experimento mismo es un experimento aleatorio, se conocen los posibles resultados, pero no el resultado de realizar la acción. Así mismo, mediante los resultados obtenidos es posible inferir con cierta certeza sobre las posibilidades de ocurrencia del evento particular a la vez que inferir, con altísima probabilidad, que los resultados obtenidos en la realización de un experimento no se repetirán en otro, aunque lo realice la misma persona.

Las distintas estrategias de conteo, combinaciones y permutaciones útiles para encontrar el número de elemento de un espacio muestral y calcular la probabilidad de un suceso, no deben ser consideradas como la aplicación de fórmulas, ellas se encuadran en el contexto del razonamiento combinatorio, que corresponde a un esquema de razonamiento tan importante como el esquema de

la proporcionalidad. Plantear problemas de combinatoria sin el uso inicial de las fórmulas, posibilita que los estudiantes vayan construyendo estrategias cada vez más sistemáticas, toda vez que requieren delimitar los objetos a enumerar y simbolizarlos, iniciar la exploración seleccionando una solución en la cual han comprobado que se cumplen las condiciones del problema, tomar uno o dos elementos como pivote y a partir de ellos generar las demás configuraciones. Este proceso de construcción de las configuraciones de las posibles combinaciones, se efectúa generalmente, con repeticiones de  $m$  elementos tomados de  $a$   $n$ , por ejemplo, encontrar las posibles formas en que 4 personas (Nidia, Omaira, Pablo, Javier) se pueden sentar en una mesa de 4 sillas sabiendo que Pablo y Javier deben quedar juntos, puede dar lugar a la siguiente enumeración:

NJPO/OJPN/NPJO/OPJN

PJNO/PJON/JPON/JPNO

NOPJ/ONPJ//NOJP/ONJP

Como se observa esta lista cumple con las condiciones del problema y hay una regularidad para construirla. Estas formas de construir los posibles resultados de un problema de combinatoria, pueden ser realizadas con diversos recursos de representación uno de los cuales es el diagrama de árbol, con varios niveles de ramificación. Tanto la construcción de las secuencias como el uso de representaciones, dan lugar a discusiones sobre los procesos recursivos y la inducción matemática.